# Exercice N°5

On considère la suite $(I_n)$ définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $I_0$.
2. Montrer, a l'aide d'une intégration par parties, que $I_1 = \frac{2}{5}I_0$.
3. a) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   b) En déduire qu'elle est convergente.
4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   b) Déterminer alors la limite de la suite $(I_n)$.

**1** Calculer $I_0$.

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-u}\,du$$

$u'\sqrt{u} \xrightarrow{P} \frac{2}{3}u.\sqrt{u}$

$$= -\int_0^1 -\frac{\sqrt{1-u}}{u'\quad \sqrt{u}}\,du$$

$$= -\left[\frac{2}{3}(1-u).\sqrt{1-u}\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3}.0 + \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{2}{3}}$$